

Consideraciones Epistémicas en Juegos

Soluciones de Juego y
Conocimiento/Creencias de los
Agentes

Soluciones en Juegos

		Esposa	
		Box	Ballet
Esposo	Box	2,1	0,0
	Ballet	0,0	1,2

Determinación de Equilibrios

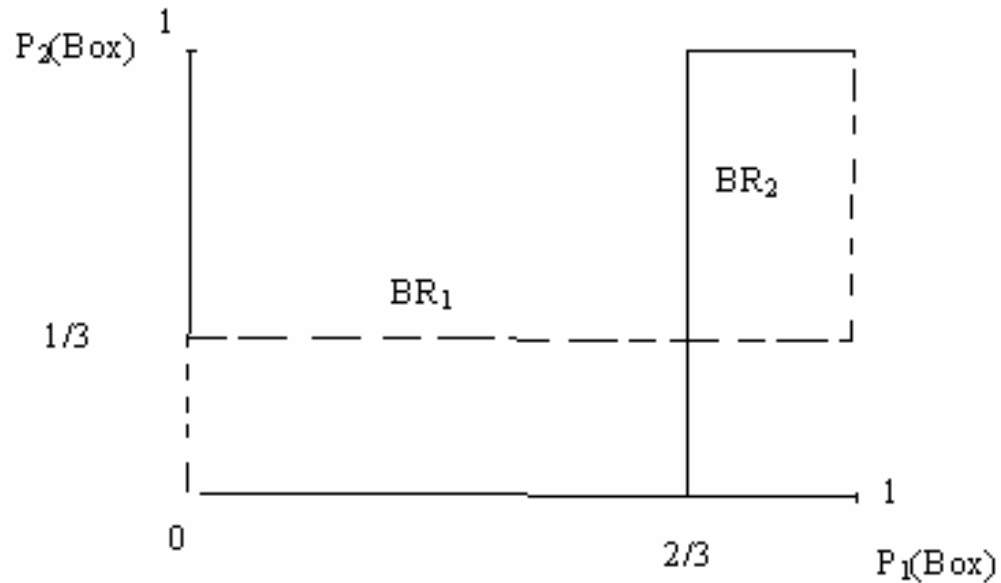
- **Operador de mejor respuesta** del agente i , BR_i , dadas las estrategias de $-i$, determina las estrategias propias que den mejor pago.
- $BR_{\text{Esposa}}(\text{Box})=\text{Box}$; $BR_{\text{Esposa}}(\text{Ballet})=\text{Ballet}$
- **Equilibrio de Nash:** (s_i, s_{-i}) , tal que:
$$s_i = BR_i(s_{-i}) \quad \text{y} \quad s_{-i} = BR_{-i}(s_i)$$

Equilibrios en estrategias mixtas:

- Igual que en estrategias puras, sólo que el conjunto de estrategias es ΔS_i , el espacio de distribuciones de probabilidad sobre S_i .
- **Equilibrio de Nash:** (σ_i, σ_{-i}) , tal que:
$$\sigma_i = BR_i(\sigma_{-i}) \text{ y } \sigma_{-i} = BR_{-i}(\sigma_i),$$

con (σ_i, σ_{-i}) en $\Delta S_i \times \Delta S_{-i}$

Batalla de los Sexos (Eq.Nash en Estrategias Mixtas)



Racionalizabilidad

- Una estrategia s_i es **racionalizable** si existen $Z_i \subseteq S_i$ y $Z_{-i} \subseteq S_{-i}$ tal que:

Para $k=i, -i$,

- $s_k \in Z_k$,
- cada $s_k \in Z_k$ es tal que

$$s_k = BR_k(\mu_k)$$

donde μ_k es una distribución de probabilidades con soporte Z_{-k}

Eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas

- Una estrategia s_i en S_i está **estrictamente dominada** si existe una estrategia mixta σ_i sobre S_i tal que el pago esperado de la combinación (σ_i, s_{-i}) es estrictamente mayor que el pago de (s_i, s_{-i}) , cualquiera sea s_{-i} en S_{-i}
- s_i en S_i es **IU** si sobrevive a la eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas.

Teorema

- (s_i, s_{-i}) es un profile **IU** en un juego *finito* sí y sólo sí es un profile de estrategias **racionalizables** en el juego.

En la Batalla de los Sexos...

Profiles racionalizables:

		Esposa	
		Box	Ballet
Esposo	Box	2,1	0,0
	Ballet	0,0	1,2

Conocimiento y Soluciones

En cada noción de solución que vimos (Equilibrio de Nash en Estrategias Puras, Equilibrio de Nash en Estrategias Mixtas, IU o Racionalizabilidad), la “predicción” de que los jugadores van a coincidir en ella está justificada por el conocimiento y las creencias de los agentes.

Análisis epistémico de un juego:

	I	D
A	2,2	0,0
B	0,0	1,1

Aparte de estrategias y pagos:

- Conjunto de tipos T_i para cada i , y una función μ_i , que a cada tipo de i , t_i , asigna una distribución de probabilidades sobre $S_{-i} \times T_{-i}$, $\mu_i(t_{-i})$.
- Un estado es $(s_i, t_i; s_{-i}, t_{-i})$

Creencias

- Para cada i :
 - t_i se puede identificar con $\text{Prob}(S_{-i} \times T_{-i})$
 - t_{-i} se puede identificar con una probabilidad sobre $S_i \times T_i$, en particular se determina un valor
 $\text{Prob}(S_i \times \text{Prob}(S_{-i} \times T_{-i}))$
 - Entonces t_i se puede identificar con
 $\text{Prob}(S_{-i} \times \text{Prob}(S_i \times \text{Prob}(S_{-i} \times T_{-i})))$
 - etc. etc..

Volviendo al juego...

- Supongamos que $T_1 = \{t^a, u^a\}$ y $T_2 = \{t^b, u^b\}$
- Y que μ_1, μ_2 vienen dadas por las siguientes tablas:

$\mu_1(t^a)$

I D

u^b	0	$1/2$
t^b	0	$1/2$

 $\mu_1(u^a)$

I D

u^b	$1/2$	0
t^b	0	$1/2$

 $\mu_2(t^b)$

A B

u^a	0	$1/2$
t^a	0	$1/2$

 $\mu_2(u^b)$

A B

u^a	$1/2$	0
t^a	0	$1/2$

Equilibrio:

- Supongamos que el estado es (B, t^a, D, t^b)
- La respuesta de 1 es “correcta”, dado que asigna a D una probabilidad $(1/2 + 1/2)$.
- La respuesta que 2 da es “correcta”, ya que asigna a B una probabilidad 1.

Creencias:

- Pero 1 piensa que es posible que 2 esté equivocado acerca de su estrategia: ya que le da una probabilidad $\frac{1}{2}$ al tipo u^b , que a su vez asigna una probabilidad $\frac{1}{2}$ a que 1 juegue A en vez de B.
- Lo mismo para 2. Es decir, piensa que 1 está equivocado acerca de su estrategia. Asigna una probabilidad $\frac{1}{2}$ al tipo u^a , que a su vez asigna una probabilidad $\frac{1}{2}$ a que 1 juegue I en vez de D.

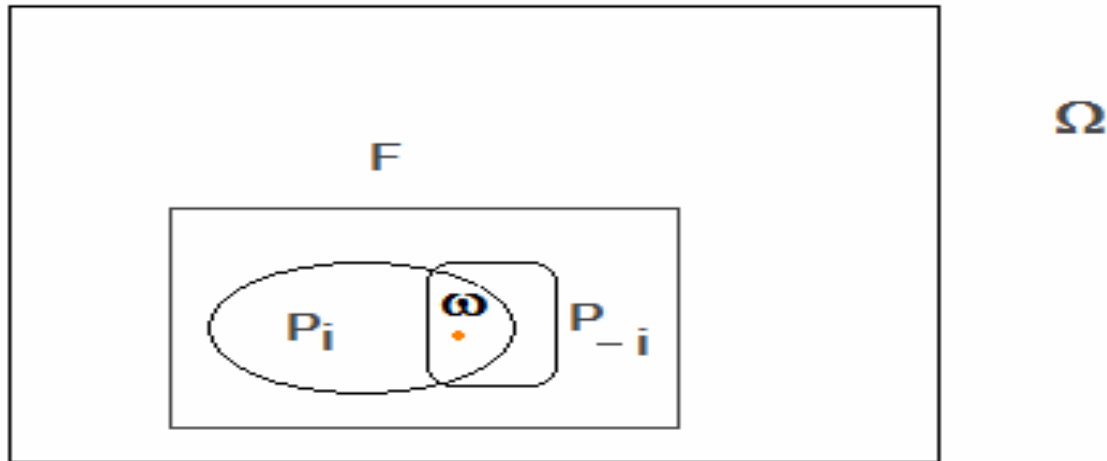
Racionalidad

- 1 y 2 son racionales, dado que maximizan sus pagos dadas sus creencias.
- Pero 1 piensa que es posible que 2 sea irracional dado que asigna una probabilidad $\frac{1}{2}$ a (D, u^b) , pero con el tipo u^b , 2 obtiene mayor pago con I que con D.
- 2 piensa que es posible que 1 sea irracional dado que asigna una probabilidad $\frac{1}{2}$ a (B, u^a) , pero con el tipo u^a , 1 obtiene mayor pago con A que con B.

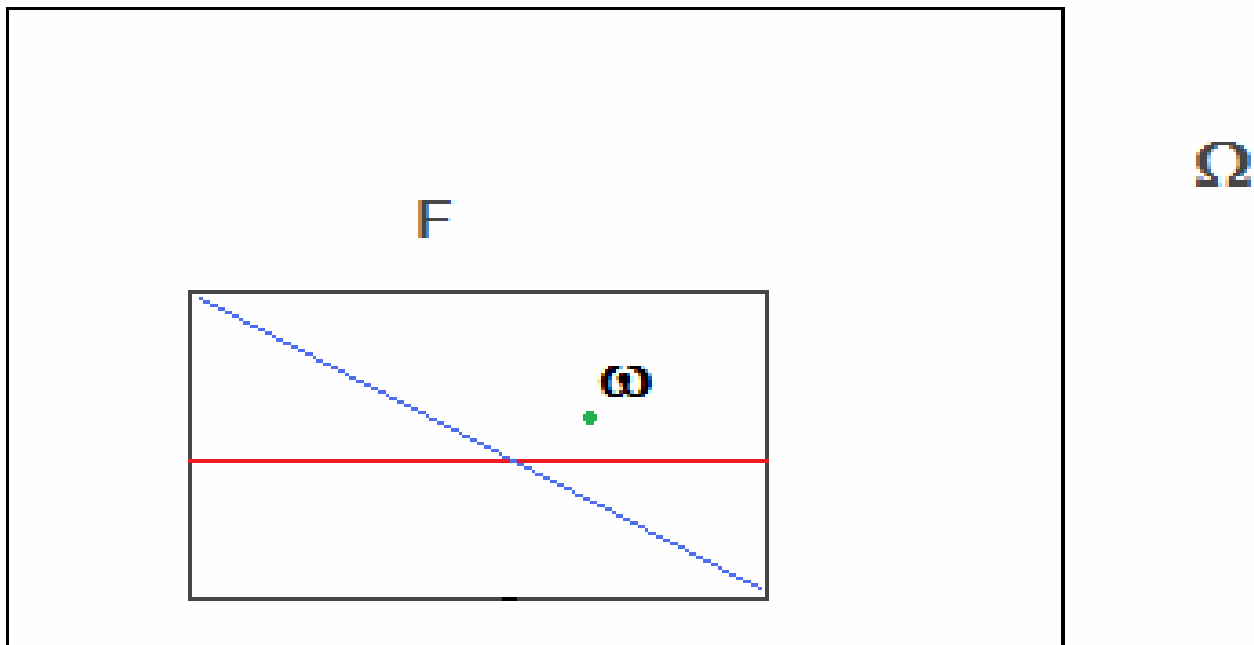
¿Hay un lenguaje más cómodo para hablar de estas cosas?

- ω es un estado,
- Ω es el conjunto de estados,
- $P_i(\omega) = \{\omega' \in \Omega: i \text{ no puede distinguir a } \omega \text{ de } \omega'\}$ (el “conocimiento” de i). Suponemos que P_i determina una partición de Ω .
- $s_i(\omega)$ es la acción elegida por i en el estado ω .
- $\mu_i(\omega)$ es una distribución de probabilidades (“creencia”) de i acerca de S_{-i} en el estado ω .

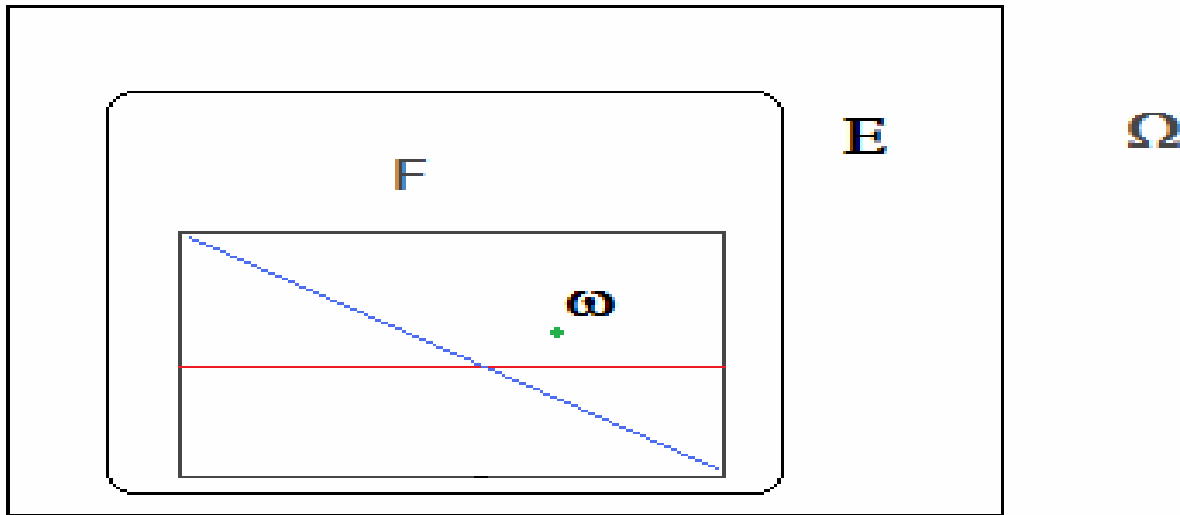
- Un evento F es **conocimiento mutuo** en el estado ω si $P_i(\omega) \subseteq E$, para $i=1,2$.



- Un evento F es **auto-evidente** si para todo $\omega \in F$, $P_i(\omega) \subseteq F$, para $i=1,2$.



- Un evento E es **conocimiento común** en el estado ω si hay un evento auto-evidente F , tal que $\omega \in F \subseteq E$, para $i=1,2$.



Condiciones para que $(s_i(\omega), s_{-i}(\omega))$ sea un Equilibrio de Nash:

En el estado ω , cada i :

- Conoce las estrategias elegidas por el otro: $P_i(\omega) \subseteq \{\omega' \in \Omega: s_{-i}(\omega') = s_{-i}(\omega)\}$
- Su creencia es consistente con su conocimiento: el soporte de $\mu_i(\omega)$ está incluido en $\{s_{-i}(\omega'): \omega' \in P_i(\omega)\}$
- Es racional: $s_i(\omega) = \text{BR}_i(\mu_i(\omega))$

Condición suficiente para Eq. de Nash:

Sólo necesitamos conocimiento mutuo de:

- Las funciones de pago,
- Las acciones que van a elegir,
- La racionalidad de los agentes.

Condiciones para que $(\mu_{-i}(\omega), \mu_i(\omega))$ sea un EN en est.mixtas:

En el estado ω , cada i :

- Conoce las creencias del otro: $P_i(\omega) \subseteq \{\omega' \in \Omega: \mu_{-i}(\omega') = \mu_{-i}(\omega)\}$
- Su creencia es consistente con su conocimiento: el soporte de $\mu_i(\omega)$ está incluido en $\{s_{-i}(\omega'): \omega' \in P_i(\omega)\}$
- Sabe que el otro es racional: para cualquier $\omega' \in P_i(\omega)$, $s_{-i}(\omega') = BR_{-i}(\mu_{-i}(\omega'))$

Este resultado no se extiende a >2 jugadores

- Para eso es necesario:
- Que los jugadores empiezen con un mismo *prior* (de modo que puedan concluir ambos en que es posible que estén en ω).
- En ω es conocimiento mutuo que son racionales.
- En ω , $\mu_i(\omega)$ y $\mu_{-i}(\omega)$ son conocimiento común.

Condiciones para que $(s_i(\omega), s_{-i}(\omega))$ sea un profile racionalizable:

En el estado ω , existe un evento F
mutuamente conocido tal que para cada i :

- el soporte de $\mu_i(\omega)$ está incluido en $\{s_{-i}(\omega') : \omega' \in F\}$
- Es racional: $s_i(\omega) = \text{BR}_i(\mu_i(\omega))$

- El estado verdadero es ω
- $\mu_i(\omega)$ puede dar probabilidad positiva a $s_i(\omega')$ ó $s_{-i}(\omega'')$
- $s_i(\omega)$ es la mejor respuesta a $\mu_i(\omega)$



Problema para estas nociones:

- Traveler's Dilemma:

	100	99	98	97	3	2
100	100,100	97,101	96,100	95,99	1,5	0,4
99	101,97	99,99	96,100	95,99	1,5	0,4
98	100,96	100,96	98,98	95,99	1,5	0,4
97	99,95	99,95	99,95	97,97	1,5	0,4
....
3	5,1	5,1	3,3	0,4
2	4,0	4,0	4,0	2,2

Equilibrio de Nash

	100	99	98	97	3	2
100	100,100	97,101	96,100	95,99	1,5	0,4
99	101,97	99,99	96,100	95,99	1,5	0,4
98	100,96	100,96	98,98	95,99	1,5	0,4
97	99,95	99,95	99,95	97,97	1,5	0,4
....
3	5,1	5,1	3,3	0,4
2	4,0	4,0	4,0	2,2

“100” está estrictamente dominada:

- Consideremos

$$a > 1$$

$$b = a + a^2 + a^3 + \dots + a^{97}$$

- La estrategia mixta:

$$(a/b)^* 99 + (a^2/b)^* 98 + \dots + (a^{97}/b)^* 2$$

domina a 100.

Racionalizabilidad

	100	99	98	97	3	2
100	100,100	97,101	96,100	95,99	1,5	0,4
99	101,97	99,99	96,100	95,99	1,5	0,4
98	100,96	100,96	98,98	95,99	1,5	0,4
97	99,95	99,95	99,95	97,97	1,5	0,4
....
3	5,1	5,1	3,3	0,4
2	4,0	4,0	4,0	2,2

En experimentos...

- La mayoría elige valores más cercanos a 100 que a 2.
- La Teoría de Juegos falla (K. Basu).
- No, lo que necesitamos es más soluciones que capturen lo que hacen los agentes (Brandenburger).

Una noción más débil

- Una estrategia s_i en S_i está **débilmente dominada** si existe una estrategia mixta σ_i sobre S_i tal que el pago esperado de la combinación (σ_i, s_{-i}) es mayor o igual que el pago de (s_i, s_{-i}) , cualquiera sea s_{-i} en S_{-i} y existe algún s'_{-i} tal que el pago esperado de (σ_i, s'_{-i}) es estrictamente mayor que el pago de (s_i, s'_{-i}) .

Admisibilidad iterada

- Una estrategia débilmente dominada se dice *inadmisible*.
- Las estrategias que sobreviven la eliminación iterada de estrategias inadmisibles se denominan **admisibles iteradas (IA)**.

IA depende del orden...

	I	D
T	1,1	0,0
M	1,1	2,1
B	0,0	2,1

	I	D
T	1,1	0,0
M	1,1	2,1
B	0,0	2,1

IA da (2,2) en el Traveler's Dilemma

- Si s_i es estrictamente dominada, entonces es débilmente dominada.

	100	99	98	97	3	2
100	100,100	97,101	96,100	95,99	1,5	0,4
99	101,97	99,99	96,100	95,99	1,5	0,4
98	100,96	100,96	98,98	95,99	1,5	0,4
97	99,95	99,95	99,95	97,97	1,5	0,4
....
3	5,1	5,1	3,3	0,4
2	4,0	4,0	4,0	2,2

Concepto de solución más débil

- $(m+1)$ -IA: es el conjunto de estrategias que permanece después de m rondas de admisibilidad iterada.
- En el Traveler's Dilemma:
 - 1 -IA = $\{2, \dots, 100\}$,
 - 2 -IA = $\{2, \dots, 99\}$,
 -
 - 99 -IA = $\{2\} = IA$

Condiciones para $(m+1)$ -IA

- **RmAM**: Rationality and m -th order Assumption of Rationality
- **Completeness**: cada T_i incluye todos los tipos posibles.
- Estos conceptos se basan en sistemas que asignan probabilidades “lexicográficamente” (muy alta para una opción e infinitesimalmente pequeña para la que le sigue en plausibilidad).

- **Racionalidad** significa que (s_i, t_i) es racional si s_i es maximal con respecto a la distribución de probabilidades correspondiente a t_i .
- **Suposición:** i supone un evento E si todos los estados no en E son infinitamente menos probables que los de E .

m -suposición de racionalidad:

- Para un tipo t_i de i , el evento “- i es racional”, incluido en $S_{-i} \times T_{-i}$, es una suposición si tiene probabilidad

$$\mu_i(t_i)[\text{“-}i \text{ es racional"}]=1.$$

- $\text{Supos}_i(\text{“-}i \text{ es racional"}) = \{t_i: \mu_i(t_i)[\text{“-}i \text{ es racional"}]=1\}$

- Inductivamente

$$R_i^0 = S_i \times \text{Supos}_i(\text{“-}i \text{ es racional"})$$

$$R_i^{m+1} = R_i^m \cap [S_i \times \text{Supos}_i(R_{-i}^m)]$$

m -suposición de racionalidad:

- **RmAM** se define entonces como los estados $\bigcap_{i=0}^m R_i^m$

- En cada

$$(s_i, t_i, s_{-i}, t_{-i}) \in \bigcap_{i=0}^m R_i^m \times \bigcap_{i=0}^m R_{-i}^m$$

hay racionalidad y suposición de racionalidad de orden m .

Todavía resta un problema...

- Completitud: T_i incluye a todos los tipos posibles.

- Pero un tipo t_i se identifica con:

$$\text{Prob}(S_{-i} \times \text{Prob}(S_i \times \dots (\text{Prob}(S_i \times \text{Prob}(S_{-i} \times T_{-i})) \dots)))$$

- Entonces:

$$T_i \times T_{-i} = F(T_i \times T_{-i})$$

Existencia de un punto fijo

- Condiciones sobre $F(\cdot)$: Mertens-Zamir (1985), Brandenburger-Dekel (1993), etc. Son condiciones topológicas o de teoría de medida.
- La menos restrictiva es suponer Axiom of Antifoundation (**siempre** existe punto fijo).
- Aún así, resulta difícil pensar que los agentes puedan especificar todos los tipos posibles.

Resumiendo:

- Resultados en experimentos como los del Traveler's Dilemma pueden justificarse como el resultado de $(m+1)$ -IA.
- Cabe esperar que m sea relativamente bajo.
- Pero la condición de completitud sigue siendo muy restrictiva.

Referencias

- Aumann, R. – Brandenburger, A.: “Epistemic Conditions for Nash Equilibrium”, *Econometrica* 63:1161-1180, 1995.
- Brandenburger, A.: “The Power of Paradox: Some Recent Developments in Interactive Epistemology”, *International Journal of Game Theory* 35:465-492, 2007.
- Brandenburger, A. – Friedenberg, A. – Keisler, J.: “Admissibility in Games”, *Econometrica* 76: 307-352, 2008.
- Brandenburger, A. – Dekel, E.: “Hierarchies of Beliefs and Common Knowledge”, *Journal of Economic Theory* 59:189-198, 1993.

- Mertens, J-F. – Zamir, S.: “Formulation of Bayesian Analysis for Games with Incomplete Information”, *International Journal of Game Theory* 14:1-29, 1985.
- Osborne, M. – Rubinstein, A.: ***A Course in Game Theory***, MIT Press, Cambridge 1994.
- Tohmé, F.: “Existence and Definability of States of the World”, *Mathematical Social Sciences* 49: 81-100, 2005.
- Zambrano, E.: “Epistemic Conditions for Rationalizability”, *Games and Economic Behavior* 63: 395-405, 2008.